pour tout : $0 \le k \le m-1$

$$I_{(n+k,m-k)} = \frac{m-k}{n+k+1} I_{(n+k+1,m-k-1)}$$

$$I_{(n+m-1,1)} = \frac{1}{n+1} I_{(n+m,0)}$$

En multipliant terme à terme on aura

$$I_{(n,m)} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)} I_{(n+m\ 0)}$$

$$I_{(n,m)} = \frac{m!}{\frac{(n+m)!}{n!}} I_{(n+m,0)}$$

Donc $I_{(n,m)} = \frac{m!n!}{(n+m)!} I_{(n+m\ 0)}$

Or $I_{(n+m\ 0)} = \frac{1}{n+m+1}$

$$\Rightarrow \boxed{I_{(n,m)} = \frac{m!n!}{(n+m+1)!}}$$

EX24

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{e^{U_n}}{U_n + 2} \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}$$

1) $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$; $x \in [0,1]$

$$f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$$

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{e}{3}$

b) $f''(x) = \frac{(x^2+2x+2)e^x}{(x+2)^3} > 0$

Pour $x \in [0,1]$

f' est croissante sur $[0,1]$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow f'(0) \le f'(x) \le f'(1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \le f'(x) \le \frac{2e}{9}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \le \frac{2e}{9} \le \frac{e}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{|f'(x)| \le \frac{e}{4}}$$

c) Soit $\varphi(x) = f(x) - x$

$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$

car $|f'(x)| \le \frac{e}{4} < 1$

φ est strictement décroissante sur $[0,1]$

φ est continue sur $[0,1]$

$$\varphi(0).\varphi(1) = \frac{1}{2}\left(\frac{e}{3} - 1\right) < 0$$

D'où il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$, par suite l'équation $f(x) = x$ admet α comme unique solution dans $[0,1]$

2) * pour n = 0

$$0 \le U_0 = \frac{1}{2} \le 1 \quad \text{(Vrai)}$$

* supposons que : $0 \le U_n \le 1$ et montrons que $0 \le U_{n+1} \le 1$

En effet

$0 \le U_n \le 1 \Rightarrow f(0) \le f(U_n) \le f(1)$

Car f est strictement croissante sur $[0,1]$

Qarray.tn - Aqra Bled - Qarray.tn